行列式の性質

n 次正方行列 $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ の行列式は，対称群 S_n を用いて

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

により定義される．行列式については以下の性質が重要である．

定理 1. $\det {}^t\!A = \det A$

定理 2. 行と行，または列と列を入れ替えると符号が変わる．

系 3. A が互いに等しい行または列をもつならば $\det A = 0$ である．

定理 4. 各行，各列について線型．すなわち，第 j 列を $\mathbf{a}_j$，第 j 行を $\mathbf{a}'_j$ などと表すと

$$(\text{行について}) \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ k\mathbf{a}'_j + k'\mathbf{b}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{vmatrix} + k' \begin{vmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{vmatrix}$$

$$(\text{列について}) \qquad \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & k\mathbf{a}_j + k'\mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$
$$= k \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix} + k' \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{b}_j & \cdots & \mathbf{a}_n \end{vmatrix}$$

定理 5. $\det(AB) = \det A \det B$

以下にそれぞれの証明を記す.

定理 1　n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ について，$\det {}^t\!A = \det A$ が成り立つ．

(証明) まず，各 $\sigma \in S_n$ について $\tau = \sigma^{-1}$ とおくと

$$a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\cdots a_{n\tau(n)}$$

となることに注意する．実際，$\sigma(k)=s_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ とおくと $k=\tau(s_k)$ であり，$\{s_1,s_2,\ldots,s_n\}=\{1,2,\ldots,n\}$ であるから $a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = \prod_{k=1}^{n} a_{s_k k} = \prod_{k=1}^{n} a_{s_k\tau(s_k)} = a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\cdots a_{n\tau(n)}$ となる．

そこで，$S_n=\{\,\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_N\,\}$ とし，$\tau_i={\sigma_i}^{-1}$ $(i=1,2,\ldots,N)$ とおくと，$S_n=\{\,\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_N\,\}$ でもあるから，$\mathrm{sgn}(\sigma_i)=\mathrm{sgn}(\tau_i)$ に注意して

$$\begin{aligned}|{}^t\!A| &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = \sum_{i=1}^{N}\mathrm{sgn}(\sigma_i)a_{\sigma_i(1)1}a_{\sigma_i(2)2}\cdots a_{\sigma_i(n)n}\\ &= \sum_{i=1}^{N}\mathrm{sgn}(\tau_i)a_{1\tau_i(1)}a_{2\tau_i(2)}\cdots a_{n\tau_i(n)} = \sum_{\tau\in S_n}\mathrm{sgn}(\tau)a_{1\tau(1)}a_{2\tau(2)}\cdots a_{n\tau(n)} = \det A\end{aligned}$$

が得られる．

定理 2　n 次正方行列の行と行または列と列を入れ替えると，行列式の符号が変わる．

(証明) 列と列の入れ替えを考える．任意の互換 $\tau \in S_n$ をとる．このとき，例えば $\tau = (\, i \; j \,)$ であれば，行列 $(\, \mathbf{a}_{\tau(1)} \; \mathbf{a}_{\tau(2)} \; \ldots \; \mathbf{a}_{\tau(n)} \,)$ はもとの行列 $A = (\, \mathbf{a}_1 \; \mathbf{a}_2 \; \ldots \; \mathbf{a}_n)$ の第 i 列と第 j 列を入れ替えた行列となる．そこで，$S_n = \{\, \sigma_1, \; \sigma_2, \; \ldots \; \sigma_N \,\}$ とすると $S_n = \{\, \sigma_1\tau, \; \sigma_2\tau, \; \ldots \; \sigma_N\tau \,\}$ でもあり，$\mathrm{sgn}(\sigma_k\tau) = -\mathrm{sgn}(\sigma_k)$ に注意して

$$
\begin{aligned}
\left| \, \mathbf{a}_{\tau(1)} \; \mathbf{a}_{\tau(2)} \; \ldots \; \mathbf{a}_{\tau(n)} \, \right| &= \sum_{k=1}^{N} \mathrm{sgn}(\sigma_k) \, a_{1\sigma_k\tau(1)} a_{2\sigma_k\tau(2)} \cdots a_{n\sigma_k\tau(n)} \\
&= -\sum_{k=1}^{N} \mathrm{sgn}(\sigma_k\tau) \, a_{1\sigma_k\tau(1)} a_{2\sigma_k\tau(2)} \cdots a_{n\sigma_k\tau(n)} \\
&= -\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = -\det A
\end{aligned}
$$

が得られる．また，転置行列を考えることにより (定理 1)，行と行の入れ替えでも符号が変わることがわかる．

系 3　n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が互いに等しい行または列をもつならば $\det A = 0$ である．

(証明) $A = (\mathbf{a}_1 \; \cdots \; \mathbf{a}_n \,)$ とし，第 i 列と第 j 列を入れ替えた行列を考えると，定理 2 により

$$
\left| \, \mathbf{a}_1 \; \cdots \; \mathbf{a}_i \; \cdots \; \mathbf{a}_j \; \cdots \; \mathbf{a}_n \, \right| = -\left| \, \mathbf{a}_1 \; \cdots \; \mathbf{a}_j \; \cdots \; \mathbf{a}_i \; \cdots \; \mathbf{a}_n \, \right|
$$

となるが，もし $\mathbf{a}_\mathbf{i} = \mathbf{a}_j$ であれば $\det A = -\det A$ ということになり，従って $\det A = 0$ である．行についても同様.

定理 4　n 次正方行列の行列式は各行および各列について線型である．

(証明) 第 1 行についての線型性を示す．実際，行列式の定義より

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} ka_{11}+k'b_{11} & ka_{12}+k'b_{12} & \cdots & ka_{1n}+k'b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&\qquad = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\,(ka_{1\sigma(1)}+k'b_{1\sigma(1)})a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\qquad = k\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} + k'\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\,b_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} \\
&\qquad = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k'\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．また，定理 1 により，行と列を入れ替えても行列式の値は変わらないから，第 1 列についても

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} ka_{11}+k'b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21}+k'b_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1}+k'b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} ka_{11}+k'b_{11} & ka_{21}+k'b_{21} & \cdots & ka_{n1}+k'b_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k'\begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \cdots & b_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
&= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k'\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

となることがわかる．他の行，列についても全く同様に確かめられる (定理 2 を用いてもよい).

定理 5　n 次正方行列 A，B について，$\det(AB) = \det A \det B$ が成り立つ．

(証明) $A = (a_{ij})$，$B = (b_{ij})$ とすると

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} b_{k1}\mathbf{a}_k \ \ \sum_{k=1}^{n} b_{k2}\mathbf{a}_k \ \ \cdots \sum_{k=1}^{n} b_{kn}\mathbf{a}_k \right)
\end{aligned}
$$

と表せる．ここで，$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$　$(j = 1, 2, \ldots, n)$ である．よって，各列についての線型性 (定理 4) により

$$
\det(AB) = \left| \sum_{k=1}^{n} b_{k1}\mathbf{a}_k \ \ \sum_{k=1}^{n} b_{k2}\mathbf{a}_k \ \ \cdots \sum_{k=1}^{n} b_{kn}\mathbf{a}_k \right| = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \cdots b_{k_n n} \left| \mathbf{a}_{k_1} \ \mathbf{a}_{k_2} \ \cdots \mathbf{a}_{k_n} \right|
$$

となるが，系 3 により，$k_1, k_2, \ldots, k_n$ の中に同じ番号があれば $\left| \mathbf{a}_{k_1} \ \mathbf{a}_{k_2} \ \cdots \mathbf{a}_{k_n} \right| = 0$ であるから

$$
\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \left| \mathbf{a}_{\sigma(1)} \ \mathbf{a}_{\sigma(2)} \ \cdots \mathbf{a}_{\sigma(n)} \right|
$$

となる．さらに，各 $\sigma \in S_n$ について，$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_m$ と m 個の互換の積で表されるとすると，σ により m 回の列の入れ替えが行われることになるから

$$
\left| \mathbf{a}_{\sigma(1)} \ \mathbf{a}_{\sigma(2)} \ \cdots \mathbf{a}_{\sigma(n)} \right| = (-1)^m \left| \mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \mathbf{a}_n \right| = \mathrm{sgn}(\sigma) \left| \mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \mathbf{a}_n \right|
$$

が成り立つ．従って，

$$
\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \left| \mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \mathbf{a}_n \right| = \det {}^t\!B \det A = \det A \det B
$$

が得られる．最後に定理 1 を用いた．