定理 10.1　V を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする．V のベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ が生成する部分空間 $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ は

$$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle = \{\, t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots t_n\mathbf{a}_n \,|\, t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbf{R} \,\}$$

により定義されるが，これについて，以下が成り立つ：

(1) $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ を含む最小の部分空間である．すなわち，W が V の部分空間であって $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in W$ ならば $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle \subset W$ が成り立つ．

(2) (i) $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ のうちのあるベクトルを他のベクトルに加えても不変である．例えば，$\mathbf{a}_j$ を $\mathbf{a}_i$ に加えて得られる部分空間

$$\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$$

は元の $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ と等しい．

(ii) $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ のうちのあるベクトルを 0 でないスカラー倍しても不変である．例えば，$\mathbf{a}_i$ を $k(\neq 0)$ 倍して得られる部分空間

$$\langle \mathbf{a}_1, \ldots, k\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$$

は元の $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ と等しい **(注 1)**.

(証明)

(1) まず，$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ が V の部分空間であることは定義から容易にわかる．実際，$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ ならば，ある $s_1, s_2, \ldots, s_n, t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbf{R}$ により

$$\mathbf{v} = s_1\mathbf{a}_1 + s_2\mathbf{a}_2 + \cdots + s_n\mathbf{a}_n$$
$$\mathbf{w} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n$$

と表されるから，このとき任意の $k, l \in \mathbf{R}$ に対して

$$k\mathbf{v} + l\mathbf{w} = (ks_1 + lt_1)\mathbf{a}_1 + (ks_2 + lt_2)\mathbf{a}_2 + \cdots (ks_n + lt_n)\mathbf{a}_n \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$$

となる．

また，W が V の部分空間であって $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in W$ であるとすると，部分空間の定義により，任意の $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbf{R}$ に対して $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n \in W$ となる．これは $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle \subset W$ であることを意味する．

(2) それぞれ，次のことの注意すると明らかであろう：

(i) $$t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_i(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j) + \cdots + t_j\mathbf{a}_j + \cdots + t_n\mathbf{a}_n = t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_i\mathbf{a}_i + \cdots + (t_i + t_j)\mathbf{a}_j + \cdots + t_n\mathbf{a}_n$$

(ii) $$t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + t_i(k\mathbf{a}_i) + \cdots + t_n\mathbf{a}_n = t_1\mathbf{a}_1 + \cdots + (t_ik)\mathbf{a}_i + \cdots + t_n\mathbf{a}_n$$

....

(注 1) これらのことから，あるベクトルのスカラー倍を他のベクトル加えても不変であることがわかる．すなわち，例えば $\mathbf{a}_j$ の k 倍を $\mathbf{a}_i$ に加えて得られる部分空間 $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + k\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ は元の $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ と等しい．$\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ の基底を求めるには，この性質を利用するとよい．