定義　$K=\mathbf{R}$ または $K=\mathbf{C}$ とする．集合 V が K 上の**ベクトル空間**であるとは，

任意の $\mathbf{a},\ \mathbf{b}\in V$ に対して，和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}\in V$ が

任意の $\mathbf{a}\in V$，$\alpha\in K$ に対して，$\mathbf{a}$ の α 倍 $\alpha\mathbf{a}\in V$ が

それぞれ定義されており，これらの演算に関して以下に記す条件 (i)〜(viii) が成り立つことをいう．また，このとき V の各元を**ベクトル**，K の各元を**スカラー**と呼ぶ．

(i) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}\qquad(\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in V)$

(ii) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})\qquad(\forall\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in V)$

(iii) **零ベクトル**と呼ばれるあるベクトル $\mathbf{0}\in V$ が存在して，任意のベクトル $\mathbf{a}\in V$ に対して，$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ が成り立つ．

(iv) 任意のベクトル $\mathbf{a}\in V$ に対して，$\mathbf{a}+\mathbf{a}'=\mathbf{0}$ を満たすベクトル $\mathbf{a}'\in V$ が存在する．この $\mathbf{a}'$ のことを $-\mathbf{a}$ と表す．

(v) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}\qquad(\forall\mathbf{a}\in V)$

(vi) $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}\qquad(\forall\mathbf{a},\mathbf{b}\in V,\ \forall\alpha\in K)$

(vii) $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}\qquad(\forall\mathbf{a}\in V,\ \forall\alpha,\beta\in K)$

(viii) $\alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a}\qquad(\forall\mathbf{a}\in V,\ \forall\alpha,\beta\in K)$

例　ベクトル空間にはいろいろなものがあるが，本講では主に次の**数ベクトル空間**を扱う．

- **実数ベクトル空間**

$$\mathbf{R}^n=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\middle|\,a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbf{R}\right\}$$

は，通常の和と実数倍により $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間である．

- **複素数ベクトル空間**

$$\mathbf{C}^n=\left\{\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\\vdots\\z_n\end{pmatrix}\middle|\,z_1,z_2,\ldots,z_n\in\mathbf{C}\right\}$$

は，通常の和と複素数倍により $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間である．実数倍のみを考えることで，$\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とみなすこともできる．

定理 9.1　ベクトル空間 V の m 個のベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ が一次独立 (従属) ならば,

(1) あるベクトルを 0 でないスカラー倍して得られる組，例えば $\mathbf{a}_i$ を $k(\neq 0)$ 倍して得られる組 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, k\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ も一次独立 (従属) である.

(2) あるベクトルを他のベクトルに加えることで得られる組，例えば $\mathbf{a}_j$ を $\mathbf{a}_i$ に加えることで得られる組 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ も一次独立 (従属) である.

(証明)

(1) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ が一次独立であるとする．このとき，

$$p_1\mathbf{a}_1 + \cdots + p_i(k\mathbf{a}_i) + \cdots + p_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

とおくと，仮定により $p_1 = \cdots = p_i k = \cdots = p_m = 0$ であるが，$k \neq 0$ より $p_1 = \cdots = p_i = \cdots = p_m = 0$ となる．よって $\{\mathbf{a}_1, \ldots, k\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ も一次独立である.

逆に，$\{\mathbf{a}_1, \ldots, k\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ が一次独立ならば，$k\mathbf{a}_i$ を $1/k$ 倍して得られる $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ も一次独立である.

これは $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ が一次従属ならば $\{\mathbf{a}_1, \ldots, k\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ も一次従属であることを意味する.

(2) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ が一次独立であるとする．このとき，

$$p_1\mathbf{a}_1 + \cdots + p_i(\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j) + \cdots + p_j\mathbf{a}_j \cdots + p_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

とおくと，

$$p_1\mathbf{a}_1 + \cdots + p_i\mathbf{a}_i + \cdots + (p_i + p_j)\mathbf{a}_j + \cdots + p_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

であるが，仮定により

$$p_1 = \cdots = p_i + p_j = \cdots = p_j = \cdots = p_m = 0$$

よって

$$p_1 = \cdots = p_i = \cdots = p_j = \cdots = p_m = 0$$

となるから，$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ も一次独立である.

逆に，$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ が一次独立であるとすると，(1) より $\mathbf{a}_j$ を -1 倍して得られる組 $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j, \ldots, -\mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ も一次独立であり **(注 1)**，さらにこの $-\mathbf{a}_j$ を $\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j$ に加えて得られる $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ も一次独立である.

これは $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ が一次従属ならば $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_j \ldots, \mathbf{a}_m\}$ も一次従属であることを意味する.

....

(注 1) $\mathbf{a}$ の -1 倍と $\mathbf{a}$ の逆元が一致すること，すなわち $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$ が成り立つことは証明を要する．前頁の定義に基づいて以下の証明を試みよ.

(1) 逆元は一意である．すなわち，$\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{a} + \mathbf{a}'' = \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{a}' = \mathbf{a}''$ である.

(2) $0\mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (\forall \mathbf{a} \in V)$

(3) $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a} \quad (\forall \mathbf{a} \in V)$

定理 9.2　実数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の n 個のベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ が一次独立であるための必要十分条件は $\det(\, \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,) \neq 0$ となることである．

(証明) $A = \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$，$\det A \neq 0$ とする．このとき，

$$p_1\mathbf{a}_1 + p_2\mathbf{a}_2 + \cdots + p_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

とおくと，$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ とおくことにより $A\mathbf{p} = \mathbf{0}$ と表せるが，$\det A \neq 0$ より A^{-1} が存在するので，それを両辺に左から掛けることにより $\mathbf{p} = \mathbf{0}$，すなわち $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 0$ となる．よって $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ は一次独立である．

逆に，$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ が一次独立ならば $\det(\, \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,) \neq 0$ であることを，$n\ (\geq 2)$ についての数学的帰納法で示そう **(注 1)**．まず，$n = 2$ のときは直接の計算で容易に確かめられる．

そこで，$n-1$ のときに主張が正しいと仮定して，$\mathbf{R}^n$ の一次独立なベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ を考える．各ベクトルの成分を $\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ と表そう．一次独立性により $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ である **(注 2)** から，$\mathbf{a}_1$ は 0 でない成分を持つ．そこで，$a_{11} \neq 0$ としてよい **(注 3)**．このとき，前定理および行列式の性質より「ある列の何倍かを他の列に加えても列ベクトルの一次独立性および行列式の値は不変」であることに注意して，$\det(\, \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,)$ は

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & {a_{22}}' & \cdots & {a_{2n}}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & {a_{n2}}' & \cdots & {a_{nn}}' \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} {a_{22}}' & \cdots & {a_{2n}}' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {a_{n2}}' & \cdots & {a_{nn}}' \end{vmatrix}$$

と表すことができる．ここで，最右辺に現れた $\mathbf{R}^{n-1}$ のベクトルの組 $\left\{ \begin{pmatrix} {a_{22}}' \\ \vdots \\ {a_{n2}}' \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} {a_{2n}}' \\ \vdots \\ {a_{nn}}' \end{pmatrix} \right\}$ も一次独立である **(注 4)** から，帰納法の仮定により $\begin{vmatrix} {a_{22}}' & \cdots & {a_{2n}}' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ {a_{n2}}' & \cdots & {a_{nn}}' \end{vmatrix} \neq 0$，従って $a_{11} \neq 0$ と合わせて $\det(\, \mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n\,) \neq 0$ が言える．

....

(注 1) $n = 1$ は自明な場合なので考慮しない．

(注 2) 零ベクトルを含むベクトルの組は一次従属である．

(注 3) 行列において，ある行とある行を入れ替えても列ベクトルの一次独立性は不変である．このことは，一次独立性の定義から容易にわかる．

(注 4) もし $\left\{ \begin{pmatrix} {a_{22}}' \\ \vdots \\ {a_{n2}}' \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} {a_{2n}}' \\ \vdots \\ {a_{nn}}' \end{pmatrix} \right\}$ が一次従属ならば $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ {a_{22}}' \\ \vdots \\ {a_{n2}}' \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ {a_{2n}}' \\ \vdots \\ {a_{nn}}' \end{pmatrix} \right\}$ も一次従属であることが，これも一次独立性の定義からわかる．

定理 9.3　実数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の一次独立な n 個のベクトルからなる組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の基底である．

(証明) $\mathbf{R}^n$ の任意のベクトルが $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ の線型結合で表せることを示せば十分である．

$A = (\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_n)$ とおくと，$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ が一次独立ならば前定理より $\det A \neq 0$ なので A^{-1} が存在する．そこで，ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ を任意にとり，$\mathbf{x}$ を未知数 (ベクトル) とする連立一次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ を考えると，両辺に A^{-1} を左から掛けることにより $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{v}$ と解が求まる．この解を $\mathbf{t} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ とすれば，$\mathbf{v} = A\mathbf{t}$，すなわち，$\mathbf{v} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \cdots + t_n\mathbf{a}_n$ と表されることになる **(注 1)**.

系 9.4　実数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の $n+1$ 個のベクトルからなる組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}\}$ は一次従属である **(注 2)**.

(証明) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}\}$ が一次独立であったとすると，$\mathbf{a}_{n+1}$ を取り除いた組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ も一次独立である **(注 3)** から，定理 9.3 より $\mathbf{R}^n$ の基底である．従って，$\mathbf{a}_{n+1}$ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ の線型結合で表されることになり，このことは $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}\}$ が一次従属であることを意味し，これは矛盾である．

....

(注 1) この表し方が一意的であることにも注意せよ．一般に，ベクトル空間 V の任意のベクトルは，V の基底の線型結合により 一意的に 表される．

(注 2) 従って，$\mathbf{R}^n$ において一次独立なベクトルは最大 n 個までしかとれない．すなわち，$n+1$ 個以上のベクトルからなる組はすべて一次従属である．

(注 3) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ が一次従属ならば $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}\}$ も一次従属となる．このことは，一次独立・一次従属の定義から容易にわかる．

定理 9.5　実ベクトル空間 V の次元は一意に定まる．すなわち，$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ および $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ がともに V の基底ならば，$m = n$ である **(注 1)**.

(証明) $m \neq n$ として矛盾を示そう．$m < n$ としてよい．

このとき，$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ が基底であることより，実数 p_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ によって

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= p_{11}\mathbf{a}_1 + p_{21}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{m1}\mathbf{a}_m \\
\mathbf{b}_2 &= p_{12}\mathbf{a}_1 + p_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{m2}\mathbf{a}_m \\
&\ \vdots \\
\mathbf{b}_n &= p_{1n}\mathbf{a}_1 + p_{2n}\mathbf{a}_2 + \cdots + p_{mn}\mathbf{a}_m
\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

と表わせる．ここで，$\mathbf{p}_j = \begin{pmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{pmatrix}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ とおくと，$\{\, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n \,\}$ は $\mathbf{R}^m$ の n $(> m)$ 個のベクトルからなる組であるから，系 9.5 より一次従属である．よって，実数の組 $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ によって

$$s_1\mathbf{p}_1 + s_2\mathbf{p}_2 + \cdots + s_n\mathbf{p}_n = \mathbf{0}$$

とすることができるが，このとき

$$\begin{aligned}
s_1\mathbf{b}_1 + s_2\mathbf{b}_2 + \cdots + s_n\mathbf{b}_n &= \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} (s_1\mathbf{p}_1 + s_2\mathbf{p}_2 + \cdots + s_n\mathbf{p}_n) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

となり，$\left\{ \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_n \right\}$ の一次独立性に反する．

....

(注 1)　従って，定理 9.3 により $\mathbf{R}^n$ の次元は n である．