定理 11.1　行列 A について，次は同値である：

(a) $\mathrm{rank}A \geq k$

(b) A に含まれる k 次の小行列式 **(注 1)** のなかに 0 でないものが存在する．

(証明) 一般に，行列 $(\,\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_k\,)$ は
　(i) ある列の何倍かを他の列に加える
　(ii) 列どうしを入れ替える
という操作により階段行列にすることができる **(注 2)**．それを $(\,\mathbf{a}_1{}'\ \mathbf{a}_2{}'\ \cdots\ \mathbf{a}_k{}'\,)$ と書くことにする．また，正方行列に対して上の (i),(ii) の操作を行っても，行列式の値は符号を除いて変わらないことにも注意しよう．

rank$A \geq k$ とすると，A に含まれる列からなる k 個の一次独立なベクトルの組 $\{\,\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\,\}$ をとることができる．このとき，行列 $(\,\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_k\,)$ を上の操作 (i),(ii) により階段行列 $(\,\mathbf{a}_1{}'\ \mathbf{a}_2{}'\ \cdots\ \mathbf{a}_k{}'\,)$ にしたとき，一次独立性により $\mathbf{a}_k{}' \neq \mathbf{0}$ である．よって，$(\,\mathbf{a}_1{}'\ \mathbf{a}_2{}'\ \cdots\ \mathbf{a}_k{}'\,)$ は 0 でない k 次の小行列式を含むから，もとの行列 $(\,\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_k\,)$ が，従って A が 0 でない k 次の小行列式を含むことになる．

逆に，rank$A < k$ とすると，A に含まれる列からなる k 個のベクトルの組 $\{\,\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ を任意にとると，この組は一次従属であるから，行列 $(\,\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \cdots\ \mathbf{a}_k\,)$ は上の操作 (i),(ii) により $(\,\mathbf{a}_1{}'\ \mathbf{a}_2{}'\ \cdots\ \mathbf{0}\,)$ という形にできる．よって，この行列に含まれるすべての k 次の小行列式が 0 であることから，A に含まれるすべての k 次の小行列式は 0 であることがわかる．

…………………………………………………………………………………………

(注 1)　A の k 次の小行列式とは，A のいくつかの行と列を取り除いて得られる k 次正方行列の行列式をいう．

(注 2)　例えば，$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ に (i),(ii) の操作を施すことにより階段行列に変形してみよう：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

この変形により rank$A = 3$ とわかるが，最後の形の第 4 列がすべて 0 となっていることから A に含まれる 4 次の小行列式はすべて 0 であり，同じく最後の形で A は 0 でない 3 次の小行列式を含むことがわかる．実際，第 1，第 2，第 4 行に着目すると，A から第 3，第 5 行，および第 1 列を取り除いて得られる 3 次の小行列式は $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4(\neq 0)$ となる．

定理 11.2　行列 A とその転置行列 ${}^tA$ の階数は一致する：$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\,{}^tA$

(証明) $\mathrm{rank}A = k$ とすると，前定理より，A に含まれる小行列式のうち，$k+1$ 次以上のものはすべて 0 であり，k 次のものの中に 0 でないものが存在する．ところが，行列式の値はその転置行列の行列式の値と等しいので，${}^tA$ に含まれる小行列式についても同じことが言える．従って，再び前定理より $\mathrm{rank}\,{}^tA = k$ である．