定理 20.1　スカラー λ が行列 A の固有値であるための必要十分条件は，λ が固有方程式

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

を満たすことである．

(証明) λ を A の固有値，$\mathbf{v}$ を λ に属する固有ベクトルとする **(注 1)**．このとき，$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ すなわち $(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ が成り立つが，もし $\det(A - \lambda E) \neq 0$ ならば行列 $A - \lambda E$ は正則ということになり $(A - \lambda E)^{-1}$ が存在するから，$\mathbf{v} = (A - \lambda E)^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ これは $\mathbf{v}$ が固有ベクトルである (従って零ベクトルでない) ことに反する．よって $\det(A - \lambda E) = 0$ である．

　また，λ が $\det(A - \lambda E) = 0$ を満たすとすると，$A - \lambda E = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_n)$ と表すとき，ベクトルの組 $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ は一次従属である．従って

$$t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 + \cdots + t_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0} \quad (t_1, t_2, \ldots, t_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$$

を満たす $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbf{R}$ が存在するから $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}$ とおけば

$$(A - \lambda E)\mathbf{v} = (\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \cdots\ \mathbf{b}_n)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

すなわち $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ が成り立ち，λ は A の固有値であり，$\mathbf{v}$ は固有値 λ に属する固有ベクトルであることがわかる．

(注 1) A 実行列であってもその固有値 λ が虚数となることがある．従って，$A - \lambda E$ は一般には複素行列ということになるが，ここでの証明は固有値はすべて実数 (従って固有ベクトルは実ベクトル) の場合を考える (以下の定理 20.2，定理 20.3 においても同様)．

　後に複素行列，複素数ベクトル空間について触れるが，ここでの議論は複素数の場合でもまったく同様である．

定理 20.2 A を正方行列とし，その (互いに異なる) 固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$，各 λ_i に属する固有空間を $W(\lambda_i)$ とする $(i = 1, 2, \ldots, m)$．このとき，次が成り立つ：

(a) ある固有値に属する固有ベクトルは，他の固有値に属することはできない．すなわち

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow W(\lambda_i) \cap W(\lambda_j) = \{\mathbf{0}\}$$

が成り立つ．

(b) 互いに異なる固有値に属する固有ベクトルからなる組は一次独立である．すなわち，$\mathbf{v}_i \in W(\lambda_i)$，$\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ならば $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ は一次独立である．

(c) $W(\lambda_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ の基底を $\{\mathbf{a}^i_1, \mathbf{a}^i_2, \ldots, \mathbf{a}^i_{k_i}\}$ とするとき，これらすべてを合わせて得られるベクトルの組 $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{m} \{\mathbf{a}^i_1, \mathbf{a}^i_2, \ldots, \mathbf{a}^i_{k_i}\}$ は一次独立である．

(証明)

(a) $\mathbf{v} \in W(\lambda_i) \cap W(\lambda_j)$ とする．このとき，$A\mathbf{v} = \lambda_i \mathbf{v}$，$A\mathbf{v} = \lambda_j \mathbf{v}$ より $\lambda_i \mathbf{v} = \lambda_j \mathbf{v}$，すなわち $(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ となるから，$\lambda_i \neq \lambda_j$ ならば $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ である．

(b) まず，$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ が一次独立であることは (a) より容易にわかる．次に，$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ の一次独立性を示そう．

$$t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \quad (t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R})$$

とおくと

$$A(t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + t_3\mathbf{v}_3) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

であるが，$A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ より

$$t_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + t_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + t_3\lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

となる．さらに $t_3\mathbf{v}_3 = -t_1\mathbf{v}_1 - t_2\mathbf{v}_2$ の関係より

$$t_1(\lambda_1 - \lambda_3)\mathbf{v}_1 + t_2(\lambda_2 - \lambda_3)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

が得られるから，$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ の一次独立性と $\lambda_1 \neq \lambda_3$，$\lambda_2 \neq \lambda_3$ により $t_1 = t_2 = 0$，さらに $\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$ より $t_3 = 0$ となる．よって $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ は一次独立である．

この議論を繰り返すと，結局 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ が一次独立であることがわかる．

(c) $t^i_j \in \mathbf{R}$ $(j = 1, 2, \ldots, k_i,\ i = 1, 2, \ldots, m)$ とし

$$\sum_{i=1}^{m} (t^i_1\mathbf{a}^i_1 + t^i_2\mathbf{a}^i_2 + \cdots + t^i_{k_i}\mathbf{a}^i_{k_i}) = \mathbf{0}$$

とおく．$t^i_1 = t^i_2 = \cdots = t^i_{k_i} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ を示せばよい．そこで

$$\mathbf{b}^i = t^i_1\mathbf{a}^i_1 + t^i_2\mathbf{a}^i_2 + \cdots + t^i_{k_i}\mathbf{a}^i_{k_i}$$

とおけば，$\mathbf{b}^i \in W(\lambda_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ であって，$\mathbf{b}^1 + \mathbf{b}^2 + \cdots + \mathbf{b}^m = \mathbf{0}$ より $\{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \ldots, \mathbf{b}^m\}$ は一次従属であるから，(b) より $\mathbf{b}^1 = \mathbf{b}^2 = \cdots = \mathbf{b}^m = \mathbf{0}$ でなければならない．よって，各 $i = 1, 2, \ldots, m$ について $t^i_1\mathbf{a}^i_1 + t^i_2\mathbf{a}^i_2 + \cdots + t^i_{k_i}\mathbf{a}^i_{k_i} = \mathbf{0}$ ということになるが，$\{\mathbf{a}^i_1, \mathbf{a}^i_2, \ldots, \mathbf{a}^i_{k_i}\}$ の一次独立性により $t^i_1 = t^i_2 = \cdots = t^i_{k_i} = 0$ がわかる．

定理 20.3　A を n 次正方行列とし，その固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ とする．このとき，A が対角化可能であるための必要十分条件は

$$\mathrm{dim}W(\lambda_1) + \mathrm{dim}W(\lambda_2) + \cdots + \mathrm{dim}W(\lambda_m) = n$$

が成り立つことである．ここで，$W(\lambda_i)$ は固有値 λ_i に属する固有空間を表す．

(証明) $\mathrm{dim}W(\lambda_1)+\mathrm{dim}W(\lambda_2)+\cdots+\mathrm{dim}W(\lambda_m) = n$ とする．このとき，各 $W(\lambda_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ から一組ずつ基底をとると，それらをすべて合わせた組は n 個のベクトルからなる．そこで，その組を $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ と書くと，各 $\mathbf{p}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ は固有ベクトルであるから $A\mathbf{p}_k = \alpha_k \mathbf{p}_k$ を満たす $\alpha_k \in \{\, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \,\}$ がとれる．よって

$$A(\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{p}_n) = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{p}_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

さらに，前定理 (c) より $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ は一次独立であるから，行列 $(\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{p}_n)$ は正則行列である．よって．

$$A = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{p}_n)\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}(\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{p}_n)^{-1}$$

が得られ，A は対角化可能である．

逆に，A が対角化可能であるとすると，ある正則行列 $P = (\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{p}_n)$ により

$$AP = P\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と表されるが，このとき P の正則性により $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ は一次独立であって，さらに

$$A\mathbf{p}_k = \alpha_k \mathbf{p}_k\ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つから，各 α_k は A の固有値，$\mathbf{p}_k$ は α_k に属する固有ベクトルである．従って，A の固有ベクトルによって $\mathbf{R}^n$ の基底を作ることができることになり，このことは

$$\mathrm{dim}W(\lambda_1) + \mathrm{dim}W(\lambda_2) + \cdots + \mathrm{dim}W(\lambda_m) \geq n$$

が成り立つことを意味する．また，前定理 (c) より

$$\mathrm{dim}W(\lambda_1) + \mathrm{dim}W(\lambda_2) + \cdots + \mathrm{dim}W(\lambda_m) \leq n$$

もわかる **(注 1)** から

$$\mathrm{dim}W(\lambda_1) + \mathrm{dim}W(\lambda_2) + \cdots + \mathrm{dim}W(\lambda_m) = n$$

が成り立つ．

....

(注 1)　$\mathbf{R}^n$ の $n{+}1$ 個以上のベクトルからなる組は一次従属である．すなわち，$\mathbf{R}^n$ のベクトルの組 $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ が一次独立ならば $m \leq n$ である．