定理 24.1　$m \times n$ 行列 A について，次が成り立つ．

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot {}^t\overline{A}\mathbf{y} \qquad (\forall \mathbf{x} \in \mathbf{C}^n,\ \forall \mathbf{y} \in \mathbf{C}^m)$$

(証明) 次の計算により確かめられる．

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\
&\qquad = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\overline{y_1} \\
&\qquad\qquad + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\overline{y_2} \\
&\qquad\qquad + \cdots \\
&\qquad\qquad + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m)\overline{y_m} \\
&\qquad = x_1(a_{11}\overline{y_1} + a_{21}\overline{y_2} + \cdots + a_{m1}\overline{y_m}) \\
&\qquad\qquad + x_2(a_{12}\overline{y_1} + a_{22}\overline{y_2} + \cdots + a_{m2}\overline{y_m}) \\
&\qquad\qquad + \cdots \\
&\qquad\qquad + x_n(a_{1n}\overline{y_1} + a_{2n}\overline{y_2} + \cdots + a_{mn}\overline{y_m}) \\
&\qquad = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{a_{11}}y_1 + \overline{a_{21}}y_2 + \cdots + \overline{a_{m1}}y_m \\ \overline{a_{12}}y_1 + \overline{a_{22}}y_2 + \cdots + \overline{a_{m2}}y_m \\ \vdots \\ \overline{a_{1n}}y_1 + \overline{a_{2n}}y_2 + \cdots + \overline{a_{mn}}y_n \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

定理 24.2　$\mathbf{C}^n$ の任意の内積 $(\cdot,\cdot)$ は，通常のドット積により

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot H\mathbf{y} \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{C}^n)$$

と表わすことができる．ここで，H はドット積に関する正定値 n 次 Hermite 行列 (すなわち ${}^t\overline{H} = H$ を満たす正定値行列) である．

(証明) $\mathbf{C}^n$ の標準基底を $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ とし

$$h_{ij} = (\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i) \qquad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

とおく．内積の性質により $h_{ji} = (\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \overline{(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i)} = \overline{h_{ij}}$ であることに注意．このとき

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i,\ \ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n y_i\mathbf{e}_i$$

に対して

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\overline{y_j}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\overline{y_j}h_{ji} = \sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n\overline{h_{ij}y_j} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\cdot\overline{\begin{pmatrix} h_{11}y_1 + h_{12}y_2 + \cdots + h_{1n}y_n \\ h_{21}y_1 + h_{22}y_2 + \cdots + h_{2n}y_n \\ \vdots \\ h_{n1}y_1 + h_{n2}y_2 + \cdots + h_{nn}y_n \end{pmatrix}} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\cdot\overline{\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

となるから

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{pmatrix}$$

とおけば $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot H\mathbf{y}$ が成り立つ．$h_{ji} = \overline{h_{ij}}$ より ${}^t\overline{H} = H$ である **(注 1)**．さらに内積の性質より $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbf{x}\cdot H\mathbf{x} > 0$ が任意の零でない $\mathbf{x}\in\mathbf{C}^n$ に対して成り立つが，このことは H が正定値であることを意味する **(注 2)**．

. . . .

(注 1)　従って $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = H\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ も成り立つ．

(注 2)　Hermite 行列 H が正定値であるとは，その固有値がすべて正ということである (Hermite 行列の固有値がすべて実数であることは容易に示される)．今の場合，$\mathbf{x}$ を固有値 λ に属する固有ベクトルとすると $\lambda\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = H\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = (\mathbf{x},\mathbf{x})$ となり，$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ から $\lambda > 0$ とわかる．

補題 24.3 $\mathbf{C}^n$ の内積 $(\cdot,\cdot)$ が正定値 (ドット積に関する)Hermite 行列 H により

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot H\mathbf{y} \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{C}^n)$$

と表わされているとき，ベクトルの組 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ この内積に関する $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底であるための必要十分条件は，$V=(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_n)$ とおくとき

$$^t\overline{V}HV = E \text{ (単位行列)}$$

が成り立つことである．

(証明) $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ が内積 $(\cdot,\cdot)$ に関して $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底であるとは

$$\mathbf{v}_i\cdot H\mathbf{v}_j = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i\neq j \end{cases}$$

が成り立つことであるが，$\mathbf{v}_i\cdot H\mathbf{v}_j = H\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_j$ に注意すると，この条件は

$$^t\overline{\mathbf{v}_j}H\mathbf{v}_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{if } i\neq j \end{cases}$$

と書くこともできる．このことが

$$^t\overline{V}HV = E$$

と同値であることを確かめるのは成分を観察すれば容易である．例えば $n=2$ の場合で見ると

$$\begin{pmatrix} \overline{v_{11}} & \overline{v_{21}} \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \overline{v_{11}} & \overline{v_{21}} \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \overline{v_{12}} & \overline{v_{22}} \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \overline{v_{12}} & \overline{v_{22}} \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = 1$$

をまとめると

$$\begin{pmatrix} \overline{v_{11}} & \overline{v_{21}} \\ \overline{v_{12}} & \overline{v_{22}} \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることがわかる．

定理 24.4 n 次正規行列 A(すなわち $A^*A = AA^*$ を満たす行列) は対角化可能である (**注 1**)．すなわち，適当な正則行列 V と対角行列 D により

$$A = VDV^{-1}$$

と表わせる．このとき，V は $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ により $V = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_n)$ と表わされるものをとることができる (**注 2**).

(証明) n についての帰納法による．$n = 1$ のときは主張は明らかに成り立つ．

n 次正規行列について主張が正しいと仮定し，$n+1$ 次正規行列 A を考える．$\mathbf{C}^{n+1}$ の内積 $(\cdot, \cdot)$ が正定値 Hermite 行列 H(${}^t\overline{H} = H$ を満たす行列) により

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot H\mathbf{y} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{C}^{n+1})$$

と表わされているとする．このとき

$$A^* = H^{-1}\,{}^t\overline{A}H$$

である．A の固有値の一つを α_1 とし，α_1 に属する固有ベクトル $\mathbf{v}_1$ であって $\|\mathbf{v}_1\| = 1$ であるものをとる．さらに，$\mathbf{v}_1$ を含む $\mathbf{C}^{n+1}$ の正規直交基底 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}\}$ をとると

$$A(\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_{n+1}) = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_{n+1}) \begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}$$

という形に表せる．ここで，$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$，${}^t\mathbf{b} = (b_1\ \cdots\ b_n)$ である．そこで，$V = (\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \cdots\ \mathbf{v}_{n+1})$ とおけば，前補題より

$${}^t\overline{V}HV = E \quad \text{すなわち} \quad V^{-1} = {}^t\overline{V}H$$

が成り立ち

$$A = V \begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} {}^t\overline{V}H$$

$$A^* = H^{-1}\,{}^t\overline{A}H = V \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & {}^t\mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{b}} & {}^t\overline{A_1} \end{pmatrix} {}^t\overline{V}H$$

従って

$$A^*A = V \begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & {}^t\mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{b}} & {}^t\overline{A_1} \end{pmatrix} {}^t\overline{V}H$$

$$AA^* = V \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & {}^t\mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{b}} & {}^t\overline{A_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} {}^t\overline{V}H$$

となるから，正規性の条件 $A^*A = AA^*$ より

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & {}^t\mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{b}} & {}^t\overline{A_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} & {}^t\mathbf{0} \\ \overline{\mathbf{b}} & {}^t\overline{A_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{b} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ．この両辺の (1,1) 成分を比べることにより ${}^t\mathbf{b}\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 0$ から $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ とわかるから，

結局

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t\overline{A_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t\overline{A_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix}$$

すなわち ${}^t\overline{A_1}A_1 = A_1{}^t\overline{A_1}$ が成り立つことになり，これは n 次正方行列 A_1 が $\mathbf{C}^n$ のドット積に関して正規であることを意味する．従って，帰納法の仮定により

$$A_1 = U_1 D_1 {U_1}^{-1}$$

となる正則行列 U_1 および対角行列 D_1 が存在し，しかも U_1 は $\mathbf{C}^n$ のドット積に関する正規直交基底を並べたもの，すなわち

$${}^t\overline{U_1}U_1 = E$$

を満たすものがとれる．そこで，$U = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & U_1 \end{pmatrix}$ とおけばやはり ${}^t\overline{U}U = E$ が成り立ち

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_1 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_1 \end{pmatrix} {}^t\overline{U}$$

となる．以上より

$$A = VU \begin{pmatrix} \alpha_1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_1 \end{pmatrix} {}^t\overline{U}{}^t\overline{V}H$$

という形が得られ，$V^{-1} = {}^t\overline{V}H$ であったことを思い出すと

$$VU\,{}^t\overline{(VU)}H = VU{}^t\overline{U}{}^t\overline{V}H = V{}^t\overline{V}H = E$$

から

$$(VU)^{-1} = {}^t\overline{(VU)}H \quad \text{すなわち} \quad {}^t\overline{(VU)}HVU = E$$

とわかり，再び前補題より VU も $\mathbf{C}^{n+1}$ の正規直交基底を並べた形をしている．これで帰納法が完成した．

(注 1) unitary 行列や Hermite 行列はこの条件を満たし，従って正規行列である．

(注 2) $\mathbf{C}^n$ の内積がドット積ならばこのような V は unitary 行列なので「正規行列は unitary 行列により対角化される」と言うことができる．