定理 4.1(Bernstein)　集合 A，B に対して，単射 $f : A \to B$ および単射 $g : B \to A$ が存在するならば，全単射 $h : A \to B$ が存在する

(証明) ....

A の部分集合列 A_0，A_1，$A_2, \ldots$ および B の部分集合列 B_0，B_1，$B_2, \ldots$ を次で定める．

$$\begin{cases} A_0 = A \backslash g(B), & B_0 = f(A_0) \\ A_n = g(B_{n-1}), & B_n = f(A_n) \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

さらに $\tilde{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$，$\tilde{B} = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ とおく．このとき，まず，

$$f(\tilde{A}) = f(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f(A_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \tilde{B}$$

であるから，f の定義域を $\tilde{A}$ に制限した写像は $\tilde{A}$ から $\tilde{B}$ への全単射を与える．また，

$$g(\tilde{B}) = g(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} g(B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \tilde{A} \backslash A_0$$

から $\tilde{A} = A_0 \cup g(\tilde{B})$ であり，g が単射であることに注意すると

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cup g(\tilde{B}^c) &= A_0 \cup g(\tilde{B}) \cup g(\tilde{B}^c) = A_0 \cup g(B) = A \\ \tilde{A} \cap g(\tilde{B}^c) &= g(\tilde{B}) \cap g(\tilde{B}^c) = \emptyset \end{aligned}$$

から $\tilde{A}^c = g(\tilde{B}^c)$ であることがわかる．よって，g の定義域を $\tilde{B}^c$ に制限した写像は $\tilde{B}^c$ から $\tilde{A}^c$ への全単射を与える．以上より，$h : A \to B$ を

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in \tilde{A}) \\ g^{-1}(x) & (x \in \tilde{A}^c) \end{cases}$$

と定めれば，これは A から B への全単射である．

定理 4.2　複素関数 $f(x+yi)=u(x,y)+iv(x,y)$ について，u，v が点 (x_0,y_0) のある近傍においてがともに C^1 級であって，Cauchy-Riemann の関係式

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0),\quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

を満たすならば，f は点 $z_0=x_0+y_0i$ で微分可能である．

(証明) ....

$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ とし

$$\Delta u(x_0,y_0)=u(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)$$
$$\Delta v(x_0,y_0)=v(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)$$

とおく．u．v が点 (x_0,y_0) のある近傍で C^1 級ならば全微分可能であるから，Δx，Δy が十分小さいとき

$$\Delta u(x_0,y_0)=u_x(x_0,y_0)\Delta x+u_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta x,\ \Delta y)$$

$$\begin{aligned}\Delta v(x_0,y_0)&=v_x(x_0,y_0)\Delta x+v_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta x,\ \Delta y)\\&=-u_y(x_0,y_0)\Delta x+u_x(x_0,y_0)\Delta y+o(\Delta x,\ \Delta y)\end{aligned}$$

と表せる．ここで，$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$，$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$，$v_x=\frac{\partial v}{\partial x}$，$v_y=\frac{\partial v}{\partial y}$ であり，$\Delta v(x_0,y_0)$ について Cauchy-Riemann の関係式を用いた．また，$o(\Delta x,\ \Delta y)$ は $\displaystyle\lim_{(\Delta x.\Delta y)\to(0,0)}\frac{|o(\Delta x,\ \Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$ となる項を表す．これより，

$$\begin{aligned}f(z_0+\Delta z)-f(z_0)&=\Delta u(x_0,y_0)+i\Delta v(x_0,y_0)\\&=u_x(x_0,y_0)\Delta x+u_y(x_0,y_0)\Delta y\\&\qquad+i\{-u_y(x_0,y_0)\Delta x+u_x(x_0,y_0)\Delta y\}+o(\Delta x,\ \Delta y)\\&=\{u_x(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)\}(\Delta x+i\Delta y)+o(\Delta x,\ \Delta y)\end{aligned}$$

よって

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=u_x(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)+\frac{o(\Delta x,\ \Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

となるが，$\Delta z\to 0$ すなわち $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ のとき $\left|\dfrac{o(\Delta x,\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}\right|=\dfrac{|o(\Delta x,\Delta y)|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0$ であることから

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=u_x(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)$$

が得られる．従って，f は $z_0=x_0+y_0i$ で微分可能である．