定理 11.1　位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において，相違なる任意の二点 $x_1, x_2 \in X$ に対して $G_1, G_2 \in \mathcal{O}$ が存在して $x_1 \in G_1$，$x_2 \in G_2$，$G_1 \cap G_2 = \emptyset$ を満たすとき，この空間を **Hausdorff** 空間という．Hausdorff 空間においては，compact 集合は閉集合 (補集合が開集合) である．

(証明) . . . .

$(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff 空間，$K \subset X$ を compact 集合とする．$K^c = X \backslash K \in \mathcal{O}$ を示せばよい．
$a \in K^c$ を任意に固定する．このとき，$x \in K$ ならば $a \neq x$ なので，$O_x, U_x \in \mathcal{O}$ であって $a \in O_x$，$x \in U_x$，$O_x \cap U_x = \emptyset$ となるものが存在する．これらの U_x $(x \in K)$ を用いて開被覆 $K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$ をつくると，K の compact 性により有限個の $\exists x_1, x_2, \ldots, x_N \in K$ によって $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_{x_i}$ とできる．そこで，$O_a = \bigcap_{i=1}^{N} O_{x_i}$ とおくと，$O_a \in \mathcal{O}$ であって，$O_{x_i} \cap U_{x_i} = \emptyset$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ から $O_a \cap K = \emptyset$ すなわち $O_a \subset K^c$ とわかる．
このようにして，各 $a \in K^c$ に対して $a \in O_a$，$O_a \subset K^c$ となる $O_a \in \mathcal{O}$ がとれるから，$K^c = \bigcup_{a \in K^c} O_a \in \mathcal{O}$ である．

定理 11.2　位相空間 $(X, \mathcal{O})$ において，$K(\subset X)$ が compact ならば，その閉部分集合 $F(\subset K)$ も compact である．

(証明) ....

$F \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ $(O_\lambda \in \mathcal{O})$ とすると，$K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \cup F^c$ となるが，F が閉集合ならば $F^c \in \mathcal{O}$ であるから，K の compact 性より $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N \in \Lambda$ であって，$K \subset \bigcup_{i=1}^N O_{\lambda_i} \cup F^c$ となるものが存在する．このとき，$F \subset \bigcup_{i=1}^N O_{\lambda_i}$ となっているから，F も compact である．

定理 11.3　$\mathbf{R}$ に通常の距離 $d(x, x') = |x - x'|$ による位相を入れるとき，$\mathbf{R}$ の部分集合 K が compact であることと有界閉集合であることは同値である．

(証明) . . . .

$K \subset \mathbf{R}$ が compact であるとする．距離空間は Hausdorff 空間であるから，定理 13.1 より K は閉集合である．また，$a \in K$ を任意にとり，開被覆

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a-n, a+n) \ (= \mathbf{R})$$

を考えると，ここから有限被覆がとれるので，ある $N \in \mathbf{N}$ により

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N} (a-n, a+n) = (a-N, a+N)$$

とできる．すなわち K は有界である．

逆に，$K \subset \mathbf{R}$ が有界閉集合ならば compact であることを示す．そのためには，compact 集合の閉部分集合はまた compact であること (定理 13.2)，および compact 集合の連続像はまた compact である (例題 13.3) ことから，閉区間 $[0,1]$ が compact であることを示せば十分である．そこで，任意の開被覆

$$[0,1] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

をとり

$$\tilde{K} = \left\{ x \in [0,1] \;\middle|\; \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \Lambda,\ [0,x] \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i} \right\}$$

とおく．$\tilde{K}$ は $[0,1]$ の部分集合なので上に有界，従って上限 $c = \sup \tilde{K}$ が存在し，$c \leq 1$ であるが，$c > 0$ にも注意しよう．なぜなら，$0 \in U_{\lambda_0}$ となる $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在し，$\delta > 0$ を十分小さくとれば $[0, \delta] \subset U_{\lambda_0}$ より $\delta \in \tilde{K}$ となるからである．さらに，上限の定義と $x \in \tilde{K} \ \Rightarrow\ [0,x] \subset \tilde{K}$ に注意すると

$$0 \leq x < c \ \Rightarrow x \in \tilde{K}, \qquad c < x \ \Rightarrow x \notin \tilde{K}$$

とわかる．$c = 1$ かつ $c \in \tilde{K}$ であることを示せばよい．$c \in (0,1]$ なので $c \in U_{\lambda_c}$ なる $\lambda_c \in \Lambda$ が存在し，さらに U_{λ_c} が開集合であることより $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_{\lambda_c}$ かつ $0 < c-\varepsilon$ となる $\varepsilon > 0$ がとれる．このとき $c - \varepsilon \in \tilde{K}$ であるから，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \Lambda$ が存在して

$$[0, c-\varepsilon] \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i}$$

従って

$$[0, c+\varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i} \cup U_{\lambda_c} \quad \text{特に} \quad [0, c+\frac{\varepsilon}{2}] \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{\lambda_i} \cup U_{\lambda_c}$$

であって $c + \frac{\varepsilon}{2} \notin \tilde{K}$ だから $c + \frac{\varepsilon}{2} > 1$ でなければならない．$\varepsilon > 0$ はいくらでも小さくとれるから $c \geq 1$，すなわち $c = 1$ である．$c \in \tilde{K}$ であることはもはや明らかであろう．

定理 11.4　$\mathbf{R}^n$ に通常の距離

$$d((x_1, x_2, \ldots, x_n), (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - x'_k)^2}$$

による位相を入れるとき，$\mathbf{R}^n$ の部分集合 K が compact であることと有界閉集合であることは同値である．

(証明) ……………………………………………………………………………………………

前定理と同様に考えて，$[0,1]^n \subset \mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$ が compact であることを示せば十分である．n に関する数学的帰納法による．$n = 1$ の場合は前定理により示されているから，$[0,1]^n$ が $\mathbf{R}^n$ において compact であることを仮定し，$[0,1]^{n+1} = [0,1] \times [0,1]^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ を考える．任意の開被覆

$$[0,1]^{n+1} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

をとる．各 $t \in [0,1]$ に対して，$\{t\} \times [0,1]^n$ は写像

$$f_t : [0,1]^n \to \{t\} \times [0,1]^n, \quad \mathbf{x} \mapsto (t, \mathbf{x})$$

により compact 集合の連続像なので compact．よって $\lambda_1^t, \lambda_2^t, \ldots, \lambda_{t_m}^t \in \Lambda$ が存在して

$$\{t\} \times [0,1]^n \subset \bigcup_{i=1}^{t_m} U_{\lambda_i^t}$$

とできる．そこで，$G_t = \bigcup_{i=1}^{t_m} U_{\lambda_i^t}$ とおけば

$$[0,1]^{n+1} \subset \bigcup_{t \in [0,1]} G_t$$

という開被覆が得られ，さらに

$$\tilde{K} = \left\{ t \in [0,1] \;\middle|\; \exists t_1, t_2, \ldots, t_m \in [0,1], \quad [0,t] \times [0,1]^n \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{t_i} \right\}$$

とおけば，$n = 1$ の場合とまったく同様にして $1 \in \tilde{K}$ とわかり，従って $[0,1]^{n+1} = [0,1] \times [0,1]^n$ は compact である．これで帰納法が完成した．
